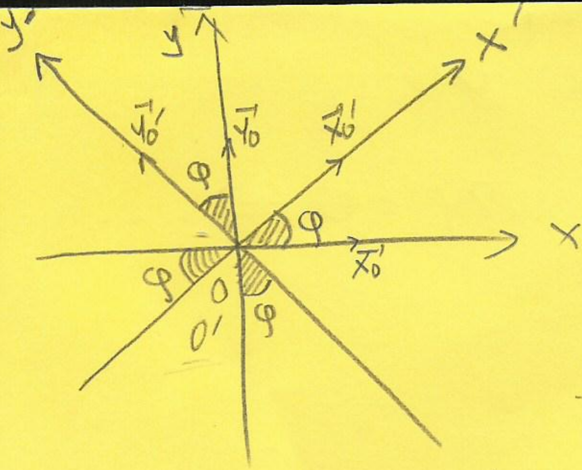
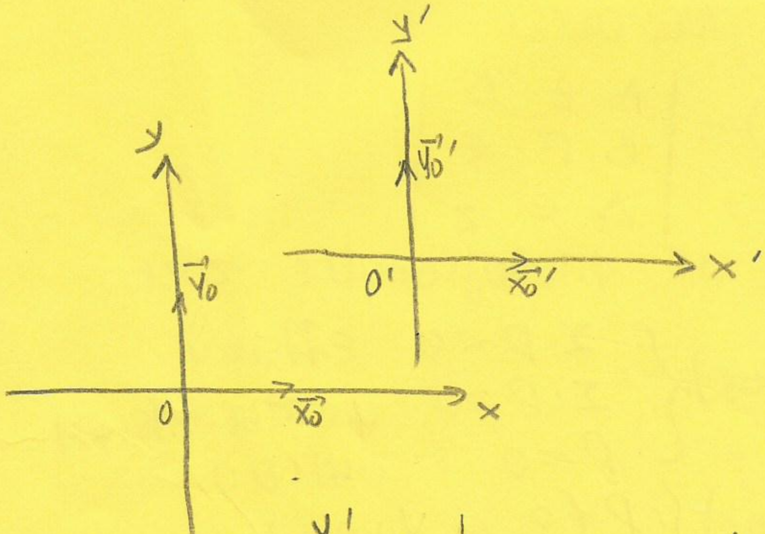


Ισχύουν:

$$x = x' \cdot συνφ - y' \cdot ημφ \qquad (1)$$
$$y = y' \cdot ημφ + y' \cdot συνφ$$

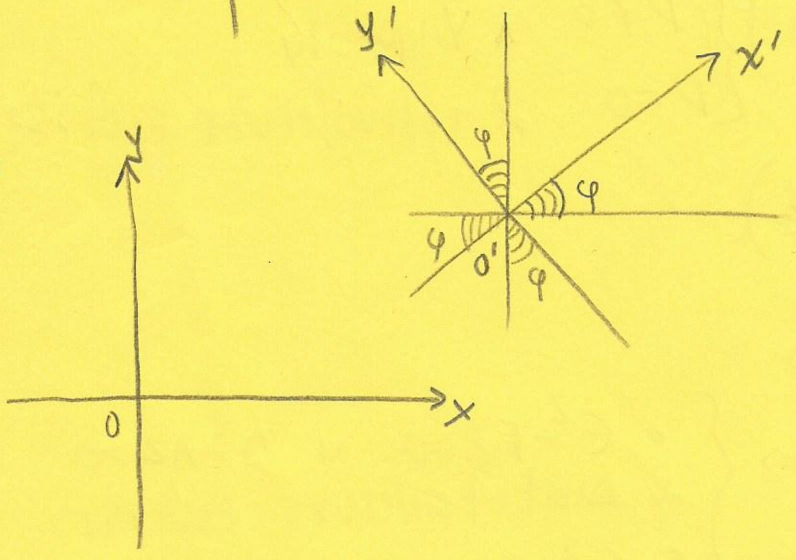
<u>Με $O \equiv O'$</u>



Ισχύουν:

$$x = α + x' \qquad (2)$$
$$y = β + y'$$

<u>Με $O \neq O'$</u>



Ισχύουν:

$$x = α + x' \cdot συνφ - y' \cdot ημφ \qquad (3)$$
$$y = β + x' \cdot ημφ + y' \cdot συνφ$$

<u>Με $O \neq O'$</u>

• Για την εξίσωση $Ax^2+2Bxy+Γy^2+2Δx+2Εy+Z=0$, <u>$B \neq 0$</u>
Για να δούμε τι παριστάνει <u>πάντα στο επίπεδο</u> θα ακολουθούμε την εξής διαδικασία:
Παίρνουμε τις εξισώσεις (3) και τις αντικαθιστούμε στην εξίσωση μας. Άρα, θα προκύψει μια νέα εξίσωση:

$$A'x^2+2B'xy+Γ'y^2+2Δ'x+2Εy+Z=0$$

Όπου, το $B' = -\frac{1}{2}(A-\Gamma)\eta\mu 2\varphi + B\sigma\upsilon\nu 2\varphi$

μετά από πράξεις. Άρα, θα πούμε ότι:

Όταν $B' = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}(A-\Gamma)\cdot\eta\mu 2\varphi + B\cdot\sigma\upsilon\nu 2\varphi = 0 \Rightarrow \ldots$

$\ldots \Rightarrow \boxed{\varepsilon\varphi 2\varphi = \frac{2B}{A-\Gamma}}$

Έπειτα ισχύουν οι Αναλλοίωτες ποσότητες:

i) $\Sigma = A + \Gamma$ και iii) $D = \begin{vmatrix} A & B & \Delta \\ B & \Gamma & \epsilon \\ \Delta & \epsilon & Z \end{vmatrix}$

ii) $d = \begin{vmatrix} A & B \\ B & \Gamma \end{vmatrix}$

Και αφού τις υπολογίσουμε τότε:

α. Αν $d > 0$ (γένους ελλείψεως): $\begin{cases} \Sigma \cdot D < 0 & \text{έλλειψη} \\ \Sigma \cdot D > 0 & \text{φανταστ. έλλειψη} \\ D = 0 & \text{σημείο} \end{cases}$

β. Αν $d < 0$ (γένους Υπερβολής) $\begin{cases} D \neq 0 & \text{Υπερβολή} \\ D = 0 & \text{2 τεμνόμενες ευθείες} \end{cases}$

γ. Αν $d = 0$ (γένους Παραβολής)

$D \neq 0$ Παραβολή

$D = 0 \Rightarrow \begin{cases} \bullet\ \epsilon^2 - \Gamma Z > 0 \text{ ή } \Delta^2 - AZ > 0 \\ \text{2 διακεκριμένες ευθείες} \\ \bullet\ \epsilon^2 - \Gamma Z < 0 \text{ ή } \Delta^2 - AZ < 0 \\ \text{2 φανταστικές ευθείες} \\ \bullet\ \epsilon^2 - \Gamma Z = 0 \text{ ή } \Delta^2 - AZ = 0 \\ \text{2 συμπίπτουσες ευθείες} \end{cases}$

ΑΣΚΗΣΗ

Εστω η καμπύλη $x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0$ ① Να βρεθούν:

i) Η κανονική εξίσωση και το κανονικό σύστημα συντεταγμένων της καμπύλης και ΝΔΟ παριστάνει παραβολή

ii) Η εστία και η εξίσωση της διευθετούσας

iii) Η εξίσωση εφαπτομένης στο $A(1,-2)$

ΛΥΣΗ

i) $A=1$, $B=-1$, $\Gamma=1$, $\Delta=-5$, $E=-2$, $Z=25$

$\Sigma=A+\Gamma=1+1=2>0$

$d=\begin{vmatrix} A & B \\ B & \Gamma \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=1-1=0$ ΓΕΝΟΥΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ

$D=\begin{vmatrix} A & B & \Delta \\ B & \Gamma & E \\ \Delta & E & Z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & -2 \\ -5 & -2 & 25 \end{vmatrix}=1\cdot(25-4)+1\cdot(-25-10)-5(2+5)=$

$=21-35-35=21-70=-49.$ ΠΑΡΑΒΟΛΗ

$\varepsilon\varphi 2\varphi=\frac{2B}{A-\Gamma}=-\frac{2}{1-1}=\infty \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{4}$ rad

$x=x'\sigma\upsilon\nu\varphi-y'\eta\mu\varphi=x'\frac{\sqrt2}{2}-y'\frac{\sqrt2}{2}=\frac{\sqrt2}{2}(x'-y')$

$y=x'\eta\mu\varphi+y'\sigma\upsilon\nu\varphi=x'\frac{\sqrt2}{2}+y'\frac{\sqrt2}{2}=\frac{\sqrt2}{2}(x'+y')$

$\frac{1}{2}(x'-y')^2-2\frac{1}{2}(x'-y')(x'+y')+\frac{1}{2}(x'+y')^2-10\frac{\sqrt2}{2}(x'-y')-6\frac{\sqrt2}{2}(x'+y')+25=0$

$(x'-y')^2-2(x'^2-y'^2)+(x'+y')^2-10\sqrt2(x'-y')-6\sqrt2(x'+y')+50=0$

$\cancel{x'^2}+y'^2+\cancel{x'^2}+y'^2-\cancel{2x'^2}+2y'^2-10\sqrt2x'-6\sqrt2x'+10\sqrt2y'-6\sqrt2y'+50=0$

$4y'^2+4\sqrt2y'-16\sqrt2x'+50=0$

$4(y'^2+\sqrt2y')-16\sqrt2x'+50=0$

$2(y'^2+\sqrt2y')-8\sqrt2x'+25=0$

$2\left(y'^2+2\frac{\sqrt2}{2}y'+\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^2\right)-8\sqrt2x'+24=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(y'+\frac{\sqrt2}{2}\right)^2 = 4\sqrt2\, x' - 12 = 4\sqrt2\left(x'-\frac{12}{4\sqrt2}\right) = 4\sqrt2\left(x'-\frac{3\sqrt2}{2}\right)$$

ΘΕΤΩ: $Y = y' + \frac{\sqrt2}{2}$ και $X = x' - \frac{3\sqrt2}{2}$

Άρα, $Y^2 = 4\sqrt2\, X$

Αν το λύναμε μέσω Γραμμικής ΑΛΓΕΒΡΑΣ θα λέγαμε:

$q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, τετραγωνική μορφή:

$$q(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$$

με τετραγωνικό πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\chi_A(x) = \det(A - xI_2) = \det\begin{pmatrix} 1-x & -1 \\ -1 & 1-x \end{pmatrix} = (1-x)^2 - 1 =$$

$$= (1-x+1)\cdot(1-x-1) = (2-x)\cdot x$$

με $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = 0$.

- Για το $V(0)$: $Au = \bar{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$, άρα $V(0) = <(1,1)> = <(\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2})>$

- Για το $V(2)$: $(A - 2I_2)u = \bar{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow -x - y = 0 \Rightarrow x = -y$, άρα $V(2) = <(1,-1)> = <(\frac{1}{\sqrt2}, -\frac{1}{\sqrt2})>$

Με $V(0) \perp V(2)$, Άλλα ο Πίνακας θα είναι ο

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix} \text{ ώστε } \det P > 0$$

Ενώ, $(x', y') = (x, y)P \Rightarrow (x,y) = (x', y')P^t \Rightarrow$

$$\Rightarrow (x,y) = (x', y')\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \\ -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2}x' & \frac{1}{\sqrt2}x' \\ -\frac{1}{\sqrt2}y' & \frac{1}{\sqrt2}y' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt2}x' - \frac{1}{\sqrt2}y' = \frac{\sqrt2}{2}(x'-y') \\ y = \frac{1}{\sqrt2}x' + \frac{1}{\sqrt2}y' = \frac{\sqrt2}{2}(x'+y') \end{cases}$$

Κάναμε αντικατάσταση στην ①

και θα πάραμε τελικά ότι και προηγουμένως:

$$\boxed{y^2 = 4\sqrt{2}\,x}$$ μια πιο ευαναγνωστη μορφη.

ii) Προφανώς, η παραβολή θα βρίσκεται στον άξονα $x'x$

με εστία $E\left(\frac{\rho}{2}, 0\right)$ με $\rho = 2\sqrt{2}$ η παράμετρος

$E\left(\frac{2\sqrt{2}}{2}, 0\right) \Rightarrow E(\sqrt{2}, 0)$ και διευθετουσα την

$(\varepsilon): x = -\frac{\rho}{2} = -\sqrt{2}$

iii) Η εξίσωση εφαπτομενης της παραβολης θα είναι:

$y \cdot y_0 = \rho(x + x_0) \Rightarrow y(-2) = 2\sqrt{2}(x+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{y = -\sqrt{2}x - \sqrt{2}}$

ΝΔΟ η εξίσωση $7x^2-48xy-7y^2+40x-30y+25=0$
παριστάνει ζεύγος πραγματικών ευθειών

ΛΥΣΗ

$A=7,\ B=-24,\ \Gamma=-7,\ \Delta=20,\ E=-15,\ Z=25$

$\Sigma=A+\Gamma=7-7=0$

$$d=\begin{vmatrix} A & B \\ B & \Gamma \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 7 & -24 \\ -24 & -7 \end{vmatrix}=-49-24^2=-625<0$$

$$D=\begin{vmatrix} A & B & \Delta \\ B & \Gamma & E \\ \Delta & E & Z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 7 & -24 & 20 \\ -24 & -7 & -15 \\ 20 & -15 & 25 \end{vmatrix}=7(-7\cdot25-15^2)+24(-24\cdot25+20\cdot15)+20(24\cdot15+146)=$$

$$=-2800-7200+1000=0$$

- $E^2-\Gamma Z=225+7\cdot25=225+175=400>0$
- $\Delta^2-AZ=400-175=225>0$

{Βάση θεωρίας του Χ. Μπαϊκούση}

Παριστάνει 2 διακεκριμένες (ή. ζεύγος) ευθείες.

ΑΣΚΗΣΗ

ΝΔΟ η εξίσωση παριστάνει παραβολή

$x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0$ (1)

ΛΥΣΗ

$\Sigma=1+1=2$

$$d=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=1-1=0$$ Γεν. Παραβολής

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & -3 \\ -5 & -3 & 25 \end{vmatrix}=-64$$ Παραβολή

$$\varepsilon\varphi 2\varphi=\frac{2B}{A-\Gamma}=\infty \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{4}$$

$x=x'\sigma\upsilon\nu\varphi-y'\eta\mu\varphi=(x'-y')\frac{\sqrt2}{2}$

$y=x'\eta\mu\varphi+y'\sigma\upsilon\nu\varphi=(x'+y')\frac{\sqrt2}{2}$

Στην (1) βρίσκουμε παραβολή με x',y'